

# Grundlagen der Inferenzstatistik

(Induktive Statistik oder schließende Statistik)

Dr. Winfried Zinn

# Deskriptive Statistik versus Inferenzstatistik

- Die Deskriptive Statistik stellt Kenngrößen zur Verfügung, die eine Merkmalsliste beschreiben (Mittelwert; Standardabweichung; Modalwert; ...).



# Deskriptive Statistik versus Inferenzstatistik



- Die Deskriptive Statistik stellt Kenngrößen zur Verfügung, die eine Merkmalsliste beschreiben (Mittelwert; Standardabweichung; Modalwert; ...).
- Die Inferenzstatistik (Induktive Statistik oder schließende Statistik) liefert Regeln und Verfahren; anhand derer statistisch bedeutsame Unterschiede verschiedener Merkmalslisten von Stichproben erkannt werden.  
Inferenzstatistik hat Verfahren mit denen statistische Hypothesen geprüft werden können.

# Population versus Stichprobe



- Die Population ist die Grundgesamtheit aller Merkmale, die untersucht werden sollen.
- Die Stichprobe ist eine Auswahl aus der Population.
- Meist wird per Zufall entschieden, welches Element in die Stichprobe gelangt.

# Von der Alltagsvermutung zur wissenschaftlichen Hypothese



- Alltagsvermutungen

# Von der Alltagsvermutung zur wissenschaftlichen Hypothese



- Alltagsvermutungen
- hochwertige Fragestellung
  - Präzise Formulierungen
  - Empirisch untersuchbar

# Von der Alltagsvermutung zur wissenschaftlichen Hypothese



- Alltagsvermutungen
- hochwertige Fragestellung
  - Präzise Formulierungen
  - Empirisch untersuchbar
- Wissenschaftliche Hypothese
  - Konditionalsätze mit abhängigen und unabhängigen Variablen
  - (Generalisierbar)
  - Falsifizierbar (Poper und der Kritische Rationalismus)

# Statistische Hypothese



- **Wissenschaftliche quantitative/ statistische Hypothese**  
(Poper/ Falsifikation):

– H0 (Null-/ Gegenhypothese)		$A=B$		$A \geq B$		$A \leq B$
– H1 (Annahme)		$A \neq B$		$A < B$		$A > B$



# Inferenzstatistik Problemstellung Teil 1



- Eine Klasse besteht aus 6 Schülerinnen und 6 Schülern. Wissenschaftler sollen ermitteln, ob es Unterschiede zwischen Jungen und Mädchen bezüglich ihrer Matheleistung gibt.
- $H_0$  lautet:  
Leistungsstand der SchülerInnen = Leistungsstand der Schüler ( $A=B$ )
- $H_1$  lautet:  
Es gibt Unterschiede zwischen den Leistungsständen ( $A \neq B$ )
- Zur Klärung der Fragestellung wird ein Mathetest entwickelt.
- Aufgrund wirtschaftlicher Beschränkungen können nur 4 SchülerInnen an dem Test teilnehmen.
- Die Forscher müssen deshalb eine Zufallsstichprobe aus der Population ziehen.

# Inferenzstatistik Problemstellung Teil 2



- Könnten alle SchülerInnen getestet werden, dann ergäben sich folgende Ergebnisse:

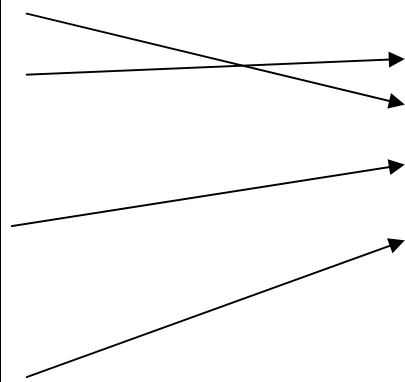
Population	
Name	Mathenote
Schülerin 3	1
Schülerin 1	1
Schülerin 2	2
Schülerin 4	2
Schülerin 8	3
Schülerin 5	3
Schüler 4	1
Schüler 1	1
Schüler 5	2
Schüler 2	2
Schüler 3	3
Schüler 6	3

weiblich	2,0
männlich	2,0

- Die Zufallsstichprobe könnte z.B. ergeben:

Stichprobe	
Name	Mathenote
Schülerin 4	2
Schülerin 2	2
Schüler 4	1
Schüler 2	2

weiblich	2,0
männlich	1,5



# Abstecher in die Wahrscheinlichkeitsrechnung



- Wenn ein Würfel x-Mal gewürfelt wird beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass immer die „1“ erscheint bei einem normalen Würfel:

Häufigkeit des Würfels	Wahrscheinlichkeit nur "1"	
1 Mal	0,167	1 zu 6
2 Mal	0,028	1 zu 36
3 Mal	0,0046	1 zu 216
10 Mal	0,000000017	1 zu 60.466.176
20 Mal	0,0000000000000000027	1 zu 3.656.158.440.062.980

(Wahrscheinlichkeit von 6 Richtige im Lotto: 1 zu 10.068.347.520)

- Auch bei einem ungezinkten Würfel ist es möglich dass nur „1“ gewürfelt werden (H0 richtig ist), aber es ist sehr unwahrscheinlich.


# Inferenzstatistik



- Eine Stichprobe bedeutet immer ein „Unschärfe“/ „Ungenauigkeit“ bei der Messung
- Die Wissenschaft brauchen deshalb Verfahren, die ihr sagen, mit welcher Wahrscheinlichkeit Unterschiede bei Stichprobenergebnisse zufallsbedingt sind und somit keine Bedeutung haben ( $H_0: A=B$ )
- Inferenzstatistik liefert statistische Verfahren, die die Wahrscheinlichkeit ( $p$ ) berechnen, dass die gemessenen Mittelwertsabweichung (bei einer Stichproben) durch Unterschiede in den Populationswerten begründet ist.
- Die Wissenschaft hat sich geeinigt (konservative Herangehensweise), dass ab einer Wahrscheinlichkeit  $< 5\%$  die  $H_0$  abgelehnt wird und somit  $H_1$  angenommen wird.
- Statistisch bedeutsame Unterschiede werden auch als signifikante bezeichnet

# Signifikanz



- Irrtumswahrscheinlichkeit der  $H_0$ , Alphafehler, Auftretswahrscheinlichkeit  $p$  
- Signifikanzniveau
  - **$p = 0,05$  werden als signifikant bezeichnet (5%)**
  - **$p = 0,01$  werden als sehr signifikant bezeichnet (1%)**
  - **$p = 0,001$  werden als höchst signifikant bezeichnet (0,1%)**
- Der Alphafehler entscheidet welche Hypothese ( $H_0$  oder  $H_1$ ) gültig ist. Im Regelfalls wird gegen die  $H_0$  oder die Gleichheit getestet und bei signifikanten (statistisch bedeutsamen) Abweichungen sich dann für  $H_1$  entschieden. Andernfalls wird  $H_0$  beibehalten.

# Weitere Aspekte der Inferenzstatistik



- Stichprobenmessungen sind immer fehlerbehaftet
- Grundfrage: Sind Abweichungen zufallsbedingt ( $H_0$  wird beibehalten) oder statistisch bedeutsam ( $H_0$  wird verworfen und  $H_1$  akzeptiert) ?
- Es gibt bei Stichprobenmessungen keine 100% Sicherheit
- Unterschied bei Stichprobenmessungen werden eher signifikant bei:
  - 1. Großen Stichproben
  - 2. Kleinen Standardabweichungen
  - 3. Großen Signifikanzniveaus
- Unterschied können innerhalb einer Gruppe (unabhängige Stichproben) bestehen oder bei Zeitreihenmessung (gepaarte Messungen)

# Vorgehen bei der empirischen Überprüfung einer Hypothese



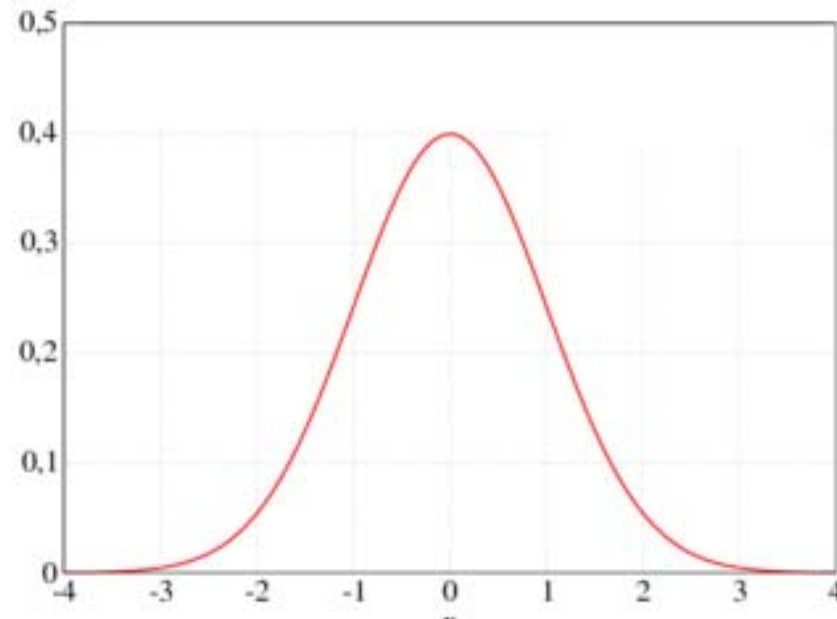
## ◆ Statistische Hypothese formulieren:

– H0 (Nullhypothese)		$A=B$		$A \geq B$		$A \leq B$
– H1 (Annahme)		$A \neq B$		$A < B$		$A > B$

- Signifikanzniveau festlegen
- Zufallstichprobe ziehen und Daten erfassen
- Deskriptive Kennwerte der Stichproben ermitteln
- Alphafehler/ Auftrittswahrscheinlichkeit  $p$  berechnen
- Entscheidung treffen, was gilt (H0 oder H1)

## • Normalverteilung

- Die Normal- oder Gauß-Verteilung ist einer der wichtigsten Typ der Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Sie wird auch Gauß-Glocke oder Glockenkurve genannt.
- Die Annahme in der biometrischen Statistik ist, dass viele Messwerte dieser Verteilung folgen.





- **Repräsentativ**

- Als Repräsentativität versteht man die Eigenschaft von Stichproben, dass diese Aussagen über eine Population zulassen. Häufig sind damit Zufallsstichproben oder Schicht- oder Quotenstichproben gemeint. Der Ausdruck „repräsentative Stichprobe“ ist kein Fachbegriff

- **Zufallsstichproben**